このプリントの特徴と使い方

このプリントは，当サイト「久留米大学医学部への道」へ訪れた方にプレゼントしている，
久留米大学医学部一般入試対策プリントです。特徴とオススメの使い方についてお伝えいたします。

特徴

○　久留米大学医学部一般入試の問題形式と傾向に沿って作成しています。

○　難易度は，本番と同じくらいです。

○　解答用紙もつけています。

○　各問題について，ヒントのページがあります。

使い方

○　本番と同じように，解答用紙も使って90分で解いてみましょう。

○　ヒントは見ないことをおすすめしますが，まだ十分に勉強していない人であれば，ヒントを見ながらでもいいでしょう。

○　解いたあと，解けなかった問題について，それが時間不足のせいなのか，自分の実力不足なのか，を確認しておきましょう。時間不足であれば，自分の解き方のどこに無駄があるのかを考え，実力不足なのであれば，解答を見てさらに勉強しましょう。

○　ミスがないかどうかも検証してください。文章の読み間違い，条件式の見落とし，などのミスだけでなく，計算ミス，書き間違いなどの単純ミスについても強く反省しましょう。
どんなに力があっても，見てもらえるのは解答用紙だけです。解答用紙に書いたものだけが，あなたの実力である，と厳しくとらえましょう。

編集責任者　長宮　慶次

1．$f(x)=2x^2-4x+3$，$g(x)=-x^2-2x-2$ とする。放物線 $y=f(x)$ の頂点を点A，放物線 $y=g(x)$ の頂点を点Bとする。直線ABと放物線 $y=f(x)$ の交点の座標は $\boxed{①}$ であり，直線ABと放物線 $y=g(x)$ の交点の座標は $\boxed{②}$ である。また，放物線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ の両方に接する2本の直線の交点の座標は $\boxed{③}$ である。

2．k は正の定数とする。曲線 $C_1: y=ke^x$ と曲線 $C_2: y=|x|e^x$ の交点の x 座標を k の式で表すと，$\boxed{④}$ である。また，2曲線 C_1，C_2 で囲まれた図形の面積が2となるときの k の値は $k=\boxed{⑤}$ である。

3．斜辺ABの長さが2である直角三角形ABCがある。斜辺ABの中点をM，直線MCに直交し，点Cを通る直線を ℓ，ℓ と直線ABとの交点をDとする。線分CMの長さはCM$=\boxed{⑥}$ である。さらにBD$=$2BC であるとき，$\sin A=\boxed{⑦}$ である。ただし，$\angle A<45°$ とする。

4．実数を係数とする4次方程式 $x^4+ax^2+b=0$ が $\sqrt{2}-i$ を解にもつ。
このとき，実数 a，b の値は $a=\boxed{⑧}$，$b=\boxed{⑨}$ であり，残りすべての解は $\boxed{⑩}$ である。

5．直線 $x+y=1$ に接する楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ がある。定数 b を a を用いて表すと，$b=\boxed{⑪}$ である。また，この楕円を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V とすると，V は a を用いて $V=\boxed{⑫}$ と表される。したがって，V を a の関数とみなすと，V は $a=\boxed{⑬}$ のとき，最大値 $\boxed{⑭}$ をとる。

6．点Pは初め数直線上の原点Oにあり，さいころを1回投げるごとに，偶数の目が出たら数直線上を正の方向に3，奇数の目が出たら負の方向に2だけ進む。
10回さいころを投げたとき，点Pが原点Oにある確率は $\boxed{⑮}$ である。また，10回さいころを投げたとき，点Pの座標が19以下である確率は $\boxed{⑯}$ である。

＜解答用紙＞

1	①		②	
	③			
2	④		⑤	
3	⑥		⑦	
4	⑧		⑨	
	⑩			
5	⑪		⑫	
	⑬		⑭	
6	⑮		⑯	

各問題のヒント

k661712fr

１．＜ヒント１＞直線ABの式を求めれば，あとは連立するだけです。

＜ヒント２＞共通接線の方程式の求め方の一つは，まず片方の曲線に接する接線の式を作り，その接線がもう一方の曲線にも接する条件式をつくることです。

２．＜ヒント１＞　交点の x 座標は，もちろん連立して求めましょう。

＜ヒント２＞　グラフについて，あまり詳しく調べる必要はありません。上下関係だけは正確に確認しましょう。

３．＜ヒント＞　点 M は，直角三角形の斜辺ABの中点です。直角三角形の外接円はどこにある？

４．＜ヒント＞　代入しても解けますし，共役な複素数を利用しても解けます。

５．＜ヒント１＞　接するということは，連立した方程式がどうなればいいのでしょうか。
　また別解として，楕円の接線の方程式を作り，それが直線 $x+y=1$ と一致する，とする解法もあります。

＜ヒント２＞　体積 V は，回転体の体積を積分で求める公式を利用するのが王道です。
　ただこの問題については，準公式を使えば簡単に V を求めることができます。

６．＜ヒント１＞　偶数の目は何回出るのでしょうか。

＜ヒント２＞　余事象で考えてみましょう。

1．　$f(x)=2(x-1)^2+1$，$g(x)=-(x+1)^2-1$ であるから，2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の頂点の座標はそれぞれ A$(1,\ 1)$，B$(-1,\ -1)$．

直線 AB の方程式は　　$y=x$

直線 $y=x$ と放物線 $y=f(x)$ との交点の x 座標は

$2x^2-4x+3=x$ から　　$(x-1)(2x-3)=0$　　　よって　$x=1,\ \dfrac{3}{2}$

したがって直線 $y=x$ と放物線 $y=f(x)$ との交点の座標は

$$(1,\ 1),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)\ \cdots\cdots 答$$

直線 $y=x$ と放物線 $y=g(x)$ との交点の x 座標は

$-x^2-2x-2=x$ から　　$(x+2)(x+1)=0$　　　よって　$x=-2,\ -1$

したがって直線 $y=x$ と放物線 $y=g(x)$ との交点の座標は

$$(-2,\ -2),\ (-1,\ -1)\ \cdots\cdots 答$$

放物線 $y=f(x)$ 上の点 P$(p,\ 2p^2-4p+3)$ における接線の方程式は，

$f'(x)=4x-4$ から　　$y-(2p^2-4p+3)=(4p-4)(x-p)$

すなわち　　$y=4(p-1)x-2p^2+3$

この直線が放物線 $y=g(x)$ に接するから　　$4(p-1)x-2p^2+3=-x^2-2x-2$

すなわち $x^2+2(2p-1)x-2p^2+5=0$ の判別式 $D=0$ から

$$(2p-1)^2-(-2p^2+5)=0$$

ゆえに　　$3p^2-2p-2=0$　$\cdots\cdots$ ①

① は異なる 2 つの実数解をもち，それらを α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3},\ \alpha\beta=-\frac{2}{3}$$

よって，2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線の方程式は

$$y=4(\alpha-1)x-2\alpha^2+3,\ y=4(\beta-1)x-2\beta^2+3$$

であるから，これら2 直線の交点の x 座標は　　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{3}$

y 座標は　　$y=4(\alpha-1)\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}-2\alpha^2+3=2\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)\}+3$

$$=2\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)+3=\frac{1}{3}$$

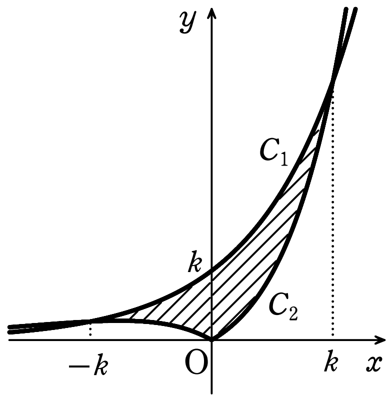
したがって，求める交点の座標は　　$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ $\cdots\cdots$答

２． $ke^x=|x|e^x$ とおくと $e^x\fallingdotseq 0$ であるから $k=|x|$

したがって，求める交点の x 座標は $x=\pm k$

$-k<x<k$ において $|x|e^x<ke^x$ であるから，

2 曲線 C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると



$$S=\int_{-k}^{k}(ke^x-|x|e^x)dx$$

$$=\int_{-k}^{0}\{ke^x-(-x)e^x\}dx+\int_{0}^{k}(ke^x-xe^x)dx$$

$$=\int_{-k}^{k}ke^xdx+\int_{-k}^{0}xe^xdx-\int_{0}^{k}xe^xdx$$

$$=k\Big[e^x\Big]_{-k}^{k}+\Big[xe^x\Big]_{-k}^{0}-\int_{-k}^{0}e^xdx-\Big[xe^x\Big]_{0}^{k}+\int_{0}^{k}e^xdx$$

$$=k(e^k-e^{-k})-(-ke^{-k})-\Big[e^x\Big]_{-k}^{0}-ke^k+\Big[e^x\Big]_{0}^{k}$$

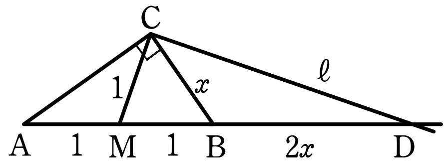
$$=-(1-e^{-k})+(e^k-1)=e^k+e^{-k}-2$$

条件より $e^k+e^{-k}-2=2$ よって $e^{2k}-4e^k+1=0$

ここで，$k>0$ であるから $e^k>1$ ゆえに $e^k=2+\sqrt{3}$

したがって $k=\log(2+\sqrt{3})$

３．△ABC は直角三角形で，斜辺 AB の中点が M であるから AM＝BM＝CM



AM＝1 であるからCM＝1

BD＝2BC であるから，BC＝x とすると

BD＝$2x$

△CMD は直角三角形であるから $\mathrm{MD}^2=\mathrm{CM}^2+\mathrm{CD}^2$

よって $(2x+1)^2=1^2+\mathrm{CD}^2$ すなわち $\mathrm{CD}^2=4x^2+4x$ ……①

$\angle\mathrm{CBD}=90^\circ+A$ であるから，△BCD において余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CD}^2=x^2+4x^2-2\cdot x\cdot 2x\cos(90^\circ+A)$$

$$=5x^2+4x^2\sin A \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から $x^2(1+4\sin A)=4x$

$x\fallingdotseq 0$ であるから $x(1+4\sin A)=4$ ……③

ここで，△ABC は直角三角形であるから

$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}\sin A$ よって $x=2\sin A$ ……④

$\sin A=t$ とおくと，③，④ から $2t(1+4t)=4$

よって $4t^2+t-2=0$ これを解くと $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$

$\sin A>0$ であるから $\sin A=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$

４．4 次方程式 $x^4+ax^2+b=0$ が $\sqrt{2}-i$ を解にもつから

$$(\sqrt{2}-i)^4+a(\sqrt{2}-i)^2+b=0 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで　$(\sqrt{2}-i)^2=2-2\sqrt{2}i+i^2=1-2\sqrt{2}i$

$$(\sqrt{2}-i)^4=(1-2\sqrt{2}i)^2=1-4\sqrt{2}i+8i^2=-7-4\sqrt{2}i$$

よって，① から　$-7-4\sqrt{2}i+a(1-2\sqrt{2}i)+b=0$

整理すると　$(a+b-7)-2\sqrt{2}(a+2)i=0$

$a+b-7$，$-2\sqrt{2}(a+2)$ は実数であるから

$$a+b-7=0,\ -2\sqrt{2}(a+2)=0$$

したがって　$a=-2$，$b=9$

別解　実数を係数とする 4 次方程式 $x^4+ax^2+b=0$ は $\sqrt{2}-i$ を解にもつから，共役複素数 $\sqrt{2}+i$ も解にもつ。

$\sqrt{2}-i$ と $\sqrt{2}+i$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは,

$$(\sqrt{2}-i)+(\sqrt{2}+i)=2\sqrt{2},\quad (\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)=3$$

であるから　$x^2-2\sqrt{2}x+3=0$

x^4+ax^2+b を $x^2-2\sqrt{2}x+3$ で割ると

$$x^4+ax^2+b=(x^2-2\sqrt{2}x+3)(x^2+2\sqrt{2}x+a+5)+(2a+4)\sqrt{2}x+b-3a-15$$

割り切れるということから，恒等的に

$$(2a+4)\sqrt{2}x+b-3a-15=0$$

よって　$2a+4=0$　かつ　$b-3a-15=0$

したがって　$a=-2$，$b=9$

方程式は　$(x^2-2\sqrt{2}x+3)(x^2+2\sqrt{2}x+3)=0$　となるので,

残りすべての解は　$x=\sqrt{2}+i$，$-\sqrt{2}\pm i$ の3つである。

５．$y=1-x$ を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に代入すると　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(1-x)^2}{b^2}=1$

$$(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2-a^2b^2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

直線 $x+y=1$ と楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が接するとき，2 次方程式 ① は重解をもつから,

① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=0$

よって　$(-a^2)^2-(a^2+b^2)(a^2-a^2b^2)=0$

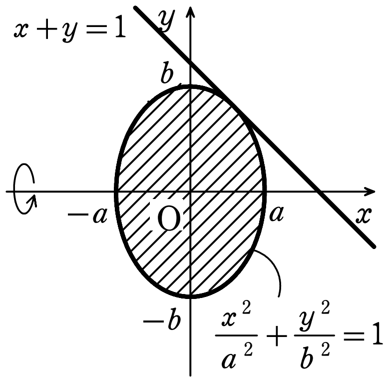
$$a^2b^2(a^2+b^2-1)=0$$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a^2+b^2=1$

よって $b>0$ より　$b=\sqrt{1-a^2}$

$a>0$，$b^2>0$ であるから　$0<a<1$

このとき，楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1-a^2}=1$



楕円を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体は y 軸に関して対称であるから，求める体積 V は

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_0^a(1-a^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=2\pi(1-a^2)\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi(a-a^3)$$

よって　$V'=\dfrac{4}{3}\pi(1-3a^2)$

$V'=0$ とすると，$0<a<1$ であるから　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0<a<1$ における V の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{27}\pi$$

よって，V は，

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，最大値 ウ $\dfrac{8\sqrt{3}}{27}\pi$ をとる。

補足

楕円に関する準公式として，以下の3つを上げておこう。①は教科書に載っていることもあるが，②③に関しては載っていないかもしれない。②を用いれば，今回の問題の体積 V について，積分することなく簡単に求めることができる。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$ の周上および内部の領域を T とする。

① T の面積を S とすると，$S=\pi ab$

② T を x 軸の周りに回転させたときの回転体の体積を V_x とすると，$V_x=\dfrac{4\pi ab^2}{3}$

③ T を y 軸の周りに回転させたときの回転体の体積を V_y とすると，$V_y=\dfrac{4\pi a^2b}{3}$

６．さいころを 1 回投げて，偶数の目が出る事象を A とすると　$P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

また　$1-P(A)=\dfrac{1}{2}$

(ア)　さいころを 10 回投げたとき，P が原点 O にあるとする。

このとき，偶数の目が x 回出たとすると

$3x+(-2)(10-x)=0$　これを解くと　$x=4$

よって，P が原点にあるのは，10 回のうち A がちょうど 4 回起こる場合である。

したがって，求める確率は　${}_{10}\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=210\cdot\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{105}{512}$

(イ)　さいころを 10 回投げたとき，P の座標が 19 以下であるとする。

このとき，偶数の目が x 回出たとすると

$3x+(-2)(10-x)\leqq 19$　これを解くと　$x\leqq\dfrac{39}{5}$　…… ①

x は $0\leqq x\leqq 10$ を満たす整数であるから，① を満たす x は

$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

$x=8,\ 9,\ 10$ のいずれかとなる場合の確率は

$$\begin{aligned}{}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\frac{1}{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}&=({}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_0)\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\\&=56\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{7}{128}\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　$1-\dfrac{7}{128}=\dfrac{121}{128}$